Modelling of Student Teachers' Mathematical Conceptions According to Ck¢ Theory: The "Knowledge Transfer" Conception [1]

Assist.Prof.Dr. Selcen Çalık Uzun
Trabzon University -Türkiye
ORCID: 0000-0002-2178-6642
selcencalikuzun@trabzon.edu.tr

Prof. Dr. Selahattin Arslan
Trabzon University -Türkiye
ORCID: 0000-0001-8557-2507
selahattin.arslan@trabzon.edu.tr

Abstract

This study aims to examine the basic mathematical knowledge of primary education student teachers according to the Ck¢ theory. The data of this qualitative study is collected through exams applied and clinical interviews undertaken with student teachers. To determine mathematical conceptions of student teachers, examinations on the subjects of Sets, Equations, Functions, and Numbers were applied to 61 classroom teachers, and then 26 of them were interviewed. A detailed analysis of the exam questions was undertaken and all types of knowledge that student teachers used whilst solving these problems were identified. Student teachers' general mathematical conceptions were revealed through the classification of the related parts of such knowledge that were expressed as "operator" in the conception phase of Ck¢ theory. In this study, the conception of knowledge transfer is presented as one of the determined conceptions. It has been identified that student teachers use the knowledge they have previously experienced as effective in problems, whilst they solve problems, and that they thus think that they will be effective in future problems as well. Operators involving such knowledge underpin the 'knowledge transfer' conception. Yet, it has also been found that this knowledge transfer leads students to make mistakes as they usually rely on the idea that a rule leading them to the correct result in a situation, which occasionally leads them to the correct result, will be applicable in any other situations. This conception shows that students tend to use the knowledge that seems appropriate for their logic, their existing knowledge, and their mathematical thinking, even if they notice that what they do in solving problems does not have any mathematical validity. Therefore, this study contributes to the literature in terms of revealing students' ways of mathematical thinking and addressing the important areas to be covered by teachers in designing learning environments.

Keywords: *Ck¢ theory, Conception, Knowledge transfer conception, Student teachers*

E-International Journal of Educational Research

Vol: 14, No: 1, pp. 71-95

Research Article

Received: 2022-08-31
Accepted: 2023-01-05

Suggested Citation

Çalık Uzun S., & Arslan, S. (2023). Modelling of student teachers' mathematical conceptions according to ck¢ theory: the 'knowledge transfer' conception, *E-International Journal of Educational Research,* 14(1), 71-95. DOI: https://doi.org/10.19160/e-ijer.1168980

[1] This study is produced from the doctoral thesis of the first author (Çalık-Uzun, 2012).

INTRODUCTION

The problem of how individuals construct knowledge is an issue that is long under discussion for mathematical concepts. Mathematics is a scientific discipline consisting of concepts and relations that cannot directly conceived or easily be acquired through everyday life experiences (Duval, 1993; 2000). Hence, it appears to be a course-subject that students abstain from, have difficulty comprehending, and approach with prejudice (Baki, 2008; Doğan and Yeniterzi, 2011; Gökçek & Güneş, 2011; Işık, Çiltaş & Bekdemir, 2008; Sertöz, 1998; Umay, 1996; Yenilmez & Uysal, 2007). As real as the idea that students perceive mathematics as a difficult course-subject to learn, it is imperative to understand what crosses students' minds in order to overcome this difficulty. Having been aware of this necessity, researchers work on developing theories and models in order to unearth what knowledge students have in their minds and how they construct such knowledge. Following on hundreds of studies in the relevant literature, it can be suggested that a significant number of those studies focus on students' misconceptions. However, does it suffice to identify students' misconceptions about certain subjects so as to understand what is going on in their minds? Before tackling this question, we need to focus on the idea that students' new knowledge is not completely false whilst it is being constructed. Balacheff (2000) argues that there is a logic underlying the behavior of students performing specific tasks, and that those behaviors are not random acts of students as the students do not act haphazardly. Given that students have such contingent meaning-makings to check their previous learning experiences if they work under certain circumstances and yet they are likely to be disproved under some other circumstances, it can be suggested that their misconception is likely to emerge as an outcome of certain ways of perceiving and/or meaning-making; in short, as an indicator of a particular conception. Thus, the concept of 'conception' needs due attention.

The current dictionary of Turkish Language Association defines conception as the act of perception, consideration; a way of thinking as an effect of societal, communal, and individual views and beliefs, the way of thinking, mindset, mentality; the ability to comprehend, consideration, intelligence, distinctive feature, concept. Conception is defined in the dictionary of education concepts as *the way of thinking or the power of thinking, the set of thoughts and beliefs adopted by a person* (Turkish Language Association, n.d.). Similarly, conception is defined as *the an idea of what something or someone is like, or a basic understanding of a situation or a principle* in the Cambridge Dictionary (Cambridge Dictionary, n.d.). Henceforth, mathematical conception can be defined as "the way of mathematical thinking, the set of mathematical thoughts and beliefs" of students. When the individual's mathematical conception is at stake, what is meant is the individual's comprehension of mathematical knowledge, their construction of that knowledge, and the set of all mathematical thoughts and beliefs. Therefore, investigating how students construct and use mathematical knowledge is to unearth students' mathematical conception.

Since students' mathematical conception is defined as their way to construct mathematical knowledge and the way of mathematical thinking, these conceptions can merely be depicted through the investigation of their own mathematical operations. Concurrently, conception comprises all knowledge structures that students have in solving a mathematical problem instead of being used to express such hard to change knowledge as misconception (Balacheff, 2000). In that case, mathematical conceptions that students develop when solving a problem may lead them to a false solution as well as guiding them to access the correct solution. Therefore, students' mathematical conceptions are twofold; correct and false mathematical conceptions. However, a relevant literature analysis shows that, although many studies investigate how students learn, and what happens in their minds based on various theories and models, few study directly unveils students' correct conceptions. Existing studies focus mainly on false conceptions.

Examples of such theories and models among many are APOS Theory, Recognition-by-components (RBC) Theory, Conception Image–Concept Definition, Misconceptions, Instrumental–Conceptual Learning, Theory of Didactical Situations, and Coception Knowing Cocept Theory (cK¢). When examining the said theories and models, it is found that the process in which the individual abstracts the knowledge or the deficiencies that may occur in these processes are stressed. Moreover, having examined the relevant literature, it can be suggested that theories and models including cK¢, which aim to understand what happens in students' minds and how they construct knowledge, are subject-based and focus on a subject or a concept (Altun and Yılmaz, 2008; Katrancı, Yılmaz & Kahraman 2009; Maracci, 2006; Webber, Pesty and Balacheff, 2002; Yazgan, 2006) and hence aim to unearth abstractions more clearly (Dubinsky & McDonald, 2001).

Harel and Sowder (2005) use two concepts in their definition of mathematical thinking: ways of understanding and ways of thinking. Describing ways of understanding, they emphasize students' meaning-making processes for a concept, sentence, or text, their solutions to a problem, and their justifications to either prove or refute an assertion, and suggest that students' – implicit or explicit - general ideas underlying such behaviors are ways of thinking. Thus, we can consider that students' reasoning for a particular mathematical situation depicts their ways of understanding. Correspondingly, we can consider that students' reasoning used in similar situations depicts their ways of understanding (Çelik, 2016). Harel and Sowder (2005) argue that teachers mostly focus on ways of understanding; yet, they overlook that these ways of understanding aim to help students to develop effective ways of thinking. Therefore, it is important to reveal students' ways of understanding and ways of thinking. On the other hand, the depiction of students' ways of understanding, and hence revealing their ways of thinking, is possible through monitoring students' activities and identifying how students analyze problem situations, and which knowledge they use to solve a problem. This study aims to respond to the questions as to how students construct mathematical knowledge, what similar ways of thinking in different subjects they develop. Within this context students are exposed to problems in different subjects in order to reveal students' mathematical conceptions and all of the knowledge that they use to solve those problems are identified and classified. Accordingly, the conception phase of cK¢ theory is suitable and useful to employ. Indeed, the operations that students apply in problem solving can be considered helpful in determining their patterns of understanding. Therefore, conceptions emerging from these operations are very useful in identifying their ways of thinking.

Constitution of knowledge about every newly introduced concept expands on a life course from early years to late adulthood. It is widely supported that primary school teachers have a significant place in one's life and an important duty to guide one's future. It is necessary to understand at the pre-service how those teachers constitute knowledge and what their mathematical conceptions are like. In fact, the quality of primary school teachers has utmost importance in early years of education and instruction as they are the first role-models of students. Particularly, given the wide use of mathematics in every aspect of life and its common need for students in every stage of education, primary school teachers' mathematical conceptions become more important (Yürekli, 2008). It is hard to overcome any shortcomings in learning mathematics if at a later level. Therefore, the onus is primary school teachers' on that front (Kandemir, 2006). However, Toluk Uçar (2011) denotes that many studies have emphasised that the mathematical conception of student teachers is insufficient for them to be able to teach at the level of primary education. Considering the content of mathematics courses that student teachers have taken throughout their collegiate career to improve their mathematical conception, it needs a robust analysis of basic concepts that they have learnt in those classes so that their conception can be unearthed. Therefore, the study focu on the idea that student teachers' mathematical conceptions can be depicted through the building blocks of mathematics such as Sets, Numbers, Equations, and Functions.

ck¢ Theory[2]

Balacheff (2000) states that he has developed cK¢ theory as a tool in designing learning environments in order to "understand students' understandings". This theory is consisted of three hierarchical stages namely "Conception", "Knowing" and "Concept" (Balacheff, 2000; 2013). According to this theory, "knowing" consists of "conceptions" while "concept" consists of "knowing". As this study aims to reveal students' mathematical conceptions, the conception stage of the theory is concentrated on and explained below.

[2] The acronym of cK¢ is consisted of the first letters of English words of Conception, Knowing, and Concept. To distinguish c for conception and c for concept, the second c is used with an apostrophe.

Conception

Although "conception" has been involved in research on learning and teaching for many years, its underpinning framework is not clearly defined and it has been used as a general perspective. According to Artigue's (1991) analysis, the term of conception has remained to be implicit and has not been clearly defined with a consensus even though it shares closelyepistemological roots with misconception (cited in Balacheff, 2000; Balacheff & Gaudin, 2002). Vittori (2018) states that the foundations of Balacheff's definition of conception are based on Brousseau's Theory of Didactic Situations/Mathematical Learning Environments Theory and that the main idea of conception is a dynamical equilibrium of an action/feedback loop between a student and a learning milieu. Balacheff (2000) argues that conception is an outcome of correct or false self-learning experiences and that we do not have much knowledge of what happens in the human mind and hence what we can observe in that regard can form our starting point. Balacheff (2000; 2013), defines this starting point as behaviors determined during an activity that occurs in an environment the characteristics of which we can set out, characterizes the conception that can be unearthed through these behaviors with the following four components.

Conception C is defined through the quartet of C(P, R, L, Σ);
P: Set of problems
R: Set of operators
L: Representation system
Σ: Control structure

P, the set of problems, is the sphere of practice of conception (Balacheff, 2000; Balacheff & Gaudin, 2002). In other words, it can be defined as the set of problems in which the conception is significant. To give an example, the sphere of practice of conception that suggests "when adding decimal numbers, the numbers before and after the comma are added separately and separated by a comma" consists of questions that require the addition operation for decimal fractional numbers. In that case, the set of problems of this conception involves all problems that require addition of decimal numbers. As seen in this example, the determination of problems within this set is quite a difficult task. There are various arguments with regards to the determination of the set of problems in the sphere of practice of conception (Brousseau 1997). Having taken into consideration the inadequacies of these arguments, Balacheff and Gaudin (2002) suggest to follow a pragmatic approach for the P set of problems by relying on the outcomes of observations on students in the course-related milieu. Thus, they put forward the idea that the set of problems can be composed of the major concept, at which students' conceptions can be found (Webber, 2004).

R, the set of operators, can yet be considered as operations, rules, and theorems in order to solve the problems in P (Webber, 2004); to put differently, it is all of the knowledge that students apply toreach the solution. Inasmuch as operators can be "concrete" enabling the operation to directly be made, they can be "abstract" enabling it to transform into linguistic, symbolic, or graphic representations (Balacheff and Gaudin; 2002). Operators are within the solutions that are reached by students. This means that students find solutions through the use of a set of operators (Webber, Pesty & Balacheff, 2002).

Operators are usually expressed with the statement of "If ... is, it is ...". For instance, the statement of "(If) there is $f(x) = x$ for $\forall\, x \in R$ in the function of $f : R \rightarrow R$, f function is the unit function for $\forall\, x \in R$" is a statement for the operator. Likewise, considering the given definition of operators, it is clear that not all operators can be expressed in line with this statement.

The third component of the conception, which is called as L – the representation system, is consisted of every type of graph, symbol, sign, etc. that are used as representations in the P set of problems and the R set of operators. That is, the L set is formed with representation systems, namely algebraic language, geometrical drawing, native language, and so forth, which facilitate expressions of problems and their solutions and allow the use of operators (Balacheff & Gaudin; 2002). Balacheff & Gaudin (2003) state that it is easier to define operators and representation system components as concrete, and accept the current definition that is commonly used as 'operators and representations used to explain a concept are parts of the meaning of that concept'.

The last component of conception can be shown as control structure (Σ), which monitors the accuracy of operations. All of the tools that are necessary for selection, determination, and decision underpin this component (Balacheff & Gaudin; 2002). Students select the operations that they will use in problem-solving, check the validity of the actions that they take, and access the solution. Every one of these three stages is guided within the control structure (Webber, Pesty & Balacheff, 2002). This dimension remained to be implicit even though it is a dimension where criteria are applied to decide whether the operations to be used to solve the problem are appropriate or not, whether the given problem can be solved or not, or to recognise the most crucial elements that play a role in understanding a mathematical concept (Balacheff, Gaudin; 2002). As the cause of this situation, it can be suggested that control structures are ingrained in students' solutions and that students often use these structures unintentionally. Following the research tradition developed for Polya and metacognition, Schoenfeld (1985) puts forward the vital role of the control structure in problem-solving (cited in Balacheff & Gaudin 2003). Control structures that help to determine whether an action is relevant or not, whether a problem is solved or not will probably demonstrate more hypothetical characteristics compared to other dimensions.

In this study, the conception phase of cK¢ theory was used as a tool to determine the mathematical conceptions of the student teachers. The questions from different mathematical subjects formed the problem set of the determined conceptions and the knowledge that student teachers used whilst solving these problems formed the operators. Many theories have focused on the construction of concepts whilst seeking an answer to how knowledge is constructed in students' minds. However, this study goes beyond the common use of the theory and aims to unearth students' ways of general mathematical thinking independent of any specific mathematical subject. In this regard, the conception phase of the cK¢ Theory is considered to be used by being stripped off of the axis of the concept. This study also moves forward with the idea that not only operators that students use reveal their ways of understanding but also conceptions that stem from the classification of these operators reveal their ways of thinking. Accordingly, this study seeks the answer to the research problem "what are the general mathematical conceptions of student teachers regardless of any specific mathematical concept?"

METHOD

Since the conceptions of student teachers are tried to determine in a realistic and holistic way in their natural environment (Yıldırım & Şimşek, 2008), the study is a qualitative study by its very nature. In addition, it has a descriptive quality as it provides the opportunity to examine the existing situation of the problem to be investigated in its own conditions and as it is, and to predict for the future (Karasar, 2009).

In order to describe the general mathematical conceptions of students, the conception phase of the cK¢ Theory was used. Therefore, first of all, it is necessary to determine the set of problems (P) for which the conceptions are valid. It would not be fair to speak about a limited set of problems, since students' general mathematical conceptions can be encountered in all kinds of problems. Thus, any problem that may be encountered can be a sphere of practice for each of these conceptions. The other component of conception, which is the representation system (L), is expressed within all kinds of symbols, signs, geometric drawings, algebraic language, verbal language, graphics, etc. employed in expressing and solving problems. Considering the general mathematical conceptions identified in this study, it is not consistent with the aim of the study if representations that can be used to express the problems, operators, and control propositions specific to these conceptions are restricted. Hence, all mathematical representations constitute this component. Another component of the conception phase of the cK¢ Theory can be shown as control structures that monitor the accuracy of operations. Balacheff and Gaudin (2002) state that the control structure is difficult to determine and remained to be implicit although it is a component where criteria are applied to decide whether the operations to be used to solve the problem are appropriate or not, whether the given problem can be solved or not, or to recognise the most crucial elements that play a role in understanding a mathematical concept. As a result of the interviews with the students, the reason of this situation can be suggested that control structures are ingrained in students' solutions and that students often use these structures unintentionally. Therefore, it was not possible to determine the control structure for each operator used by the students. Another component of the conception phase is operators, which are concisely defined as any knowledge that students apply while solving a problem. In this study, conceptions were accessed by classifying the operators determined in the answers given by students to the questions asked on different subjects. In short, in this study, the aim of which is to determine the general conceptions of students, it is sufficient to determine the operators drawn from the solutions of students, and hence, the determination of the operators in the current study is sufficient.

This study was conducted with 61 first-year students enrolled to the Primary Education degree programme in a university located at the eastern Black Sea region of Turkey.

Process

The process from identifying the problem set to classifying conceptions is presented in Chart 1.

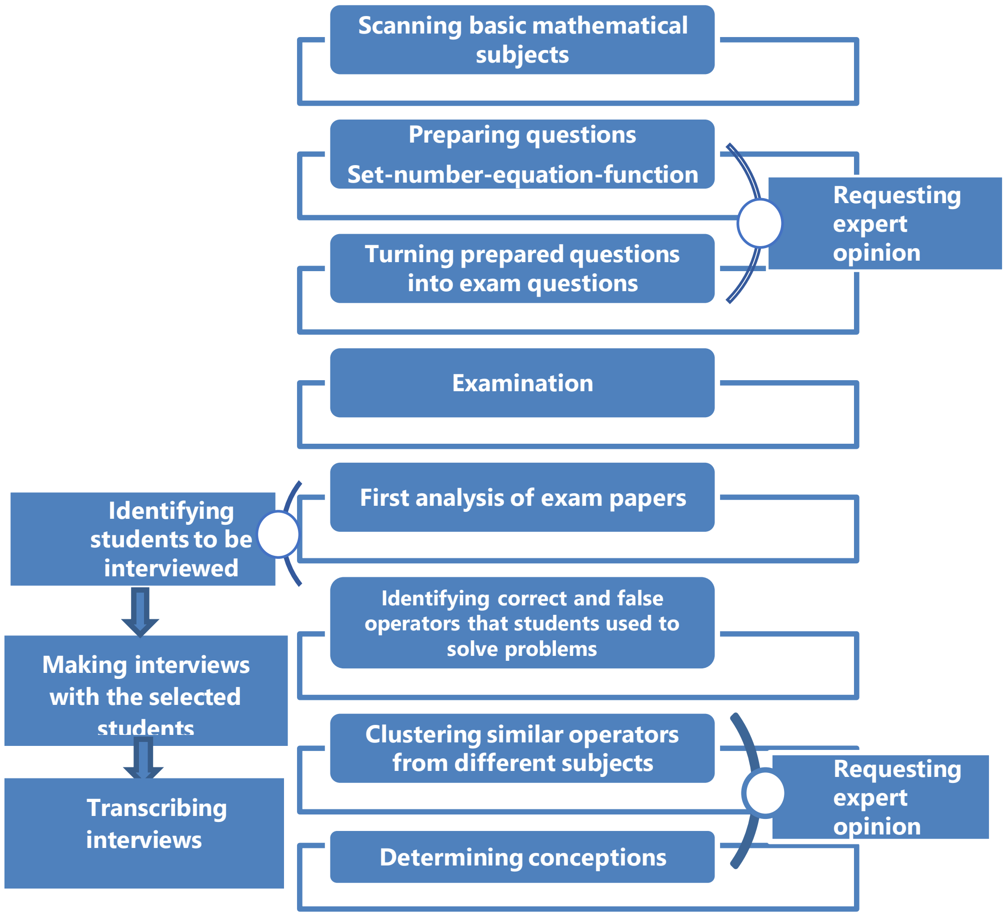


Chart 1.*The process of the study*

Data Collection

The data of the study was collected with the help of written exams and clinical interviews with students. Written exams were held in 5 sessions, 3 of which were in the autumn semester and 2 of which were in the spring semester. The contents of the exams and the total number of questions are as follows: Sets (Operations with sets, set problems) 12 questions; Numbers (Natural Numbers, Whole Numbers, Rational Numbers, Real Numbers, Exponents and Roots) 18 questions; Equations (Algebraic Expressions, Factorisation, First-Order Equations) 7 questions; Functions (Conditions of being a function, domain-range, inverse function, compound function, parabola) 11 questions.

Data Analysis

In this section, the findings obtained from the documents that examined within the study and clinical interviews are presented.

Document Analysis

As seen in Chart 1, the initial analysis of exam papers was conducted following the examination, and operators that students and students to be interviewed were simultaneously identified. Later, responses given by every student to all of the questions were analysed in order to determine student teachers' conceptions, operators used in problem-solving were identified, and identified operators were supported with student interviews and aligned with the analysis of the questions related to the course-subject. Similar ones among those operators identified as described for each subject were classified and coded with a heading. These top headings were also identified as conceptions of students.

In this study, operators are shown in two distinct ways: R_s41 and R^-_d10. There is not a separate representation determined for those correct operators that are incorrectly used; such situation is expressed as "operator used incorrectly". For instance, it is understood that the operator R_s41 (Squaring to recover from the square root) is the 41st operator determined on numbers, and is used correctly unless otherwise stated. If the operator is used incorrectly, this is also indicated.

On the other hand, the tenth operator of equations, R^-_d10 (the algebraic expression ax+b=y denotes a quadrilateral in the plane), is an operator that is always used incorrectly, and the "–" symbol in the upper index indicates that it is always incorrect.

If an operator is encountered in different subjects, the operator is indexed with the subject it lies in, yet the operator's explanation (expression) is tried to be preserved as much as possible:

R^-_d23: Neglecting some of the given while achieving the desired

R^-_k4: Neglecting some of the given while achieving the desired

It is important for the reader to understand the process of data analysis well to understand the study well. Therefore, it would be appropriate to explain it with an example. An example of the analysis of the response given by the student coded S34 to the third question about sets and the use of the interview data, gathered from the interview with them, as a support for this analysis was chosen.

S_k1: Show if the operation A∩B⊂A∩C⇒ B⊂C is correct by using Venn diagrams and definitions.

First of all, every step taken by the student was examined and it was noticed that the student realised that the set A was common in both expressions, and that they solved the problem by using the knowledge that this set was bracketed, that is, the intersection operation has distributive property over the subset. Since the below data, gathered from the interview made with the student about the solution after the exam, also supports this situation, the student; considering that the intersection operation has distributive property over the subset, arranges the expression $A \cap B \subset A \cap C$ as $A \cap (B \subset C)$ and if the operator is suitable for this situation; $R^-_k6=$ *is determined as* $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ *for A, B and C sets*. The dialogue between the student and the researcher is as follows.

S_{45}: These; I expanded the A∩B statement. I expanded them separately as A∩B. I expanded this one as A ∩ C. As this has already said subset or something here?!
R: Yes.
S_{45}: Then I wrote them that way because x∈A is common to all of them.
R: Then you put x in the A (x∈A) bracket. But then did it suddenly become B∩C or were you going to write B⊂C?
S_{45}: Actually, it cannot be B∩C because, if I took x∈A in common, I had to make this bit B⊂C.
R: So, in conclusion; you say that you use the knowledge that the intersection operation has a distributive property over the subset.
S_{45}: Yes.

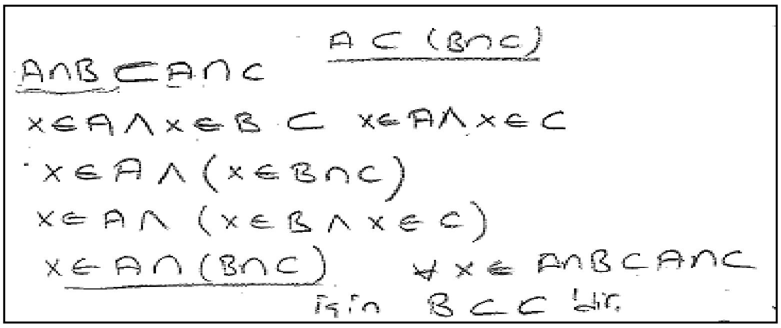


Figure 1. *S45's response to S_k1*

Then the operator used by the student is $R^{-}_{k}6 = (A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ for sets A, B and C. It is clear that this knowledge leads the student to make mistakes in solving this problem. However, considering the previous learning of the students, it is regarded that they transfer the knowledge of distributive property over the subset into this situation. For that, they apply the knowledge of "the intersection operation has distributive property over the subset" onto the knowledge of "the intersection operation with sets has distributive property on the associative operation", which always gives the correct result. Therefore, this operator is classified as an operator of the conception of knowledge transfer.

Analysis of Clinical Interviews

Qualitative data obtained from clinical interviews were descriptively analysed. The clinical interviews conducted at the end of the exams were transcribed and used to support the operators used by the students. Each interview was first transcribed, and then the expressions that would support the operators determined by the examination papers of the students were extracted. These direct quotations are included in the findings section in order to support the relevant operator, to present a realistic picture to the reader, to give the opportunity to make their own comments and make some inferences (Yıldırım & Şimşek, 2009).

Credibility of the study

Opinions from three experts were taken in order to improve the credibility of the study. With one of these three experts, both the operators, representations, and control structures determined by the students' solutions and clinical interviews made with them, and the conceptions, obtained by classifying similar operators on different subjects were discussed in detail. Since the process of data analysis that lasted until the determination of students' conceptions was quite time-and energy-consuming, opinions (approvals) from the other two experts were taken after the conceptions were formed. The data gathered was analysed by the researcher as an iterative process at certain time intervals, and they were finalised and presented in the findings section of this paper.

Limitations of the study

This study allowed to reveal 10 general mathematical conceptions of student teachers. Many conceptions have been identified by bringing relevant operators together. This study is limited to "knowledge transfer conception". For detailed information about other conceptions see Çalık Uzun (2012).

FINDINGS

As stated in the previous section, an inductive approach was adopted for determining conceptions following the classification of operators used in this study. However, in the presentation of findings, all of the operators related to the conception were first provided, and then this process was elaborated so that the reader could follow the findings effortlessly.

In this study, a detailed analysis of exam papers was made after examination to determine student teachers' general mathematical conceptions was undertaken. During the analysis, students' general mathematical conceptions were determined by bringing together the identified operators that were related to each other. In the findings section that is delimited with the “knowledge transfer conception” of the identified ones, the findings about this conception in which operators from each subject (sets, numbers, equations, functions) were presented with the provision of a sample question from each subject in order to make the presentation more comprehensible and simple. The operators of knowledge transfer conception that was determined through the classification of operators, which includes the knowledge that gives the correct result in a problem situation is used in another problem situation, are presented in Table 1.

Table 1.*Operators of the knowledge transfer conception*

	The Knowledge Transfer Conception
Acronym of operators	**Operators**
R^-_k6	If A, B and C are any three sets, it is $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$
R^-_k9	If A, B and C are any three sets, it is $(A\backslash B) \cup (A\backslash C) = A\backslash(B \cup C)$
R^-_k11	If A and B are any two sets, it is $(A'/B') = (A/B)'$
R^-_k16	If A, B and C are any three sets, it is $(A\backslash B\backslash C) = (A\backslash B)\backslash C$
R^-_k18	Thinking of difference with sets as subtraction with whole numbers
R^-_k24	If A and B are any two sets, it is $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$
R^-_s3	It is $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$
R^-_s4	If it is $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x$ and it is $\frac{e}{b} + \frac{k}{d} = y$, $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}+\frac{k}{d}}$ then it is $\frac{a}{e} + \frac{c}{k} = \frac{x}{y}$
R^-_s9	It is $\frac{x}{y} + \frac{x}{z} = t \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{1}{t}$
R^-_s10	$(a+b)^n = a^n + b^n$
R^-_s11	Division with whole numbers has distributive property over addition, so if x,y,z is $(x : y) + (x : z) = t$ then it is $x : (y + z) = t$
R^-_s20	It is $a.x^n + b.y^n = (x.y)^n.(a+b)$
R^-_s23	It is $x,y,a \in \mathbb{Z}$, $x - a \mid y \Rightarrow x \mid y + a$
R^-_s25	If it is $a,b,x \in \Re$ and $a < b-x < c$ then it is $a < b-c < x$
R^-_s26	If it is $\frac{a}{b} = c$ then it can be expressed as $-c < \frac{a}{b} < c$
R^-_s28	It is $a.x^n.b.x^n = (a+b).x^n$
R_s32	Making use of logarithms
R^-_s33	It is $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$
R^-_s34	It is $(a^n.b)^m = (a.b^n)^m = a.b^{n.m}$
R^-_s43	It is $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$
R^-_s47	Where it is $c \in Z$ then it is $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-c}$
R_d20	The equation of a line with two known points as (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2}$
R_d21	The equation of a line (x_1, y_1) with a known point and slope is $y - y_1 = m(x - x_1)$
R^-_f6	If the graph of a g relation crosses the x and y axes, that relation indicates a function
R^-_f15	If f: R\{a}→ R\{b} is a defined function, it is limf(x)=a, and b makes the denominator of the function zero
R^-_f18	If a function f is injective and surjective then it is $f(x) = f^{-1}(x)$
R^-_f21	f:A→B being a function, $f \circ g$ is defined with the help of arithmetic operations between f and g
R_f22	Where it is $f'(x_0)=0$ for the function of f: R→R, $(x_0, f'(x_0))$ is the maximum point of the function
R^-_f32	It is $f^{-1}o[(f(x) + g(x)] = f^{-1}o\, f(x) + f^{-1}o\, g(x)$

As seen, some of these operators are correct and some are false. In order to make the determination of operators and the conception to be more comprehensible, some of the operators formed for the conception is exemplified with the help of the problem situations that are the components of the conception.

Below, firstly, a question about sets and a false operator used in solving this problem is given:

S_k3: Since A and B are two sets, express the set of $(A'\backslash B') \cup (A'\backslash B)$ in the shortest way possible.

Within the scope of the study, students, coded as S10, S12, S15, S34, S37, S52 and S54, whose responses to the above question were examined, thought that the difference operation had a distributive property over the association operation by using the expression of $(\boldsymbol{A'}\backslash \boldsymbol{B'}) \cup (\boldsymbol{A'}\backslash \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A'}\backslash(\boldsymbol{B'} \cup \boldsymbol{B})$ (See

79

Figure 2). Therefore, the operator that they used was determined as $R^{-}_{k}9$: (A\B)∪ (A\C) = A\(B∪C) for sets A, B and C.

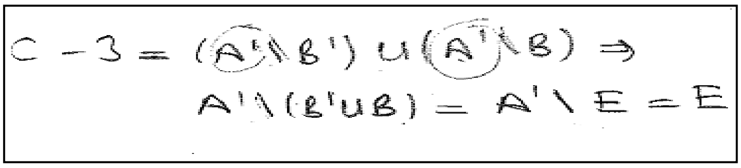


***Figure 2**.S34's response to S_k3*

Interview data of S34 confirms the operator:

R: [...] Well, can you explain the transition from $(A'\backslash B') \cup (A'\backslash B)$ to $'\backslash(B' \cup B)$?
S_{34}: I used the distributive property.
R: You used the distributive property? Of what did you use the distributive property over what?
S_{34}: Well then, the distributive property of difference over association.
R: Well, what makes you feel that the difference operation has distributive property over association or intersection, how did you think that there is such a property?
[...]
S_{34}: There is in multiplication or something, my professor, it can be from there.
R: Have you considered the distributive property of numbers?
S_{34}: Yes.

Below is a question about Numbers and an example of a false operator used to solve this problem:

S_s1: If $a, b, c \in R$ and $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}=1$, then what is $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$?

Within the scope of the study, it is found that the student coded S44, whose response to the above question was examined, divided the given and requested expressions side by side, but made a mistake while performing the division operation (See Figure 3).

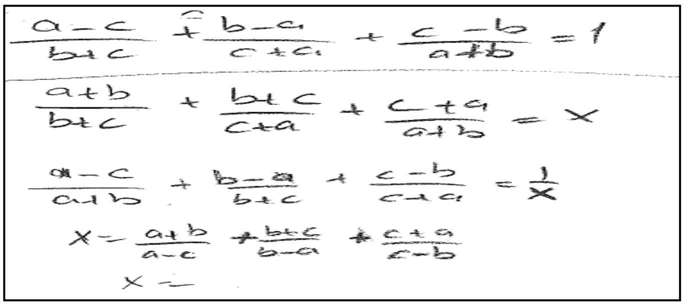


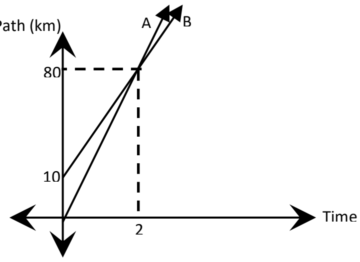
***Figure 3.** S_{44}'s response to S_s1*

In the clinical interview with them, S44 defends their solution with the following statements:

R: You have estimated the expressions given and requested in the first question. Can you tell me how you think?
S_{44}: I made it as $\frac{1}{x}$. Because the denominators are the same in these, I said these and those go.
R: Now, it means you say if they are $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=x$ and $\frac{z}{b}+\frac{p}{d}+\frac{k}{f}=y$, then it is $\frac{a}{z}+\frac{c}{p}+\frac{e}{k}=\frac{x}{y}$, is that so?
S_{44}: Yes.
[...]
R: So, when you divide the rational numbers in the sum situation, you can simplify. So aren't you thinking as if you were in the multiplication situation?
S_{44}: Yes, it appears to be so.

Based on student's solution and the interview data, the operator used was $R^{-}_{s}4$: If it is $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ and $\frac{e}{b}+\frac{k}{d}=$, **it is** $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}+\frac{k}{d}}=\frac{x}{y}$.

S_d6: The paths taken by vehicles A and B depending on time are given in the graph below. What is the distance in kilometres between the vehicles 5 hours after meeting?



S11, S26 and S43 attempted to solve the problem by using their knowledge of analytical geometry (See Figure 4) and they used the correct operator of the equation of a straight line with two known points as R_d20: (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$.

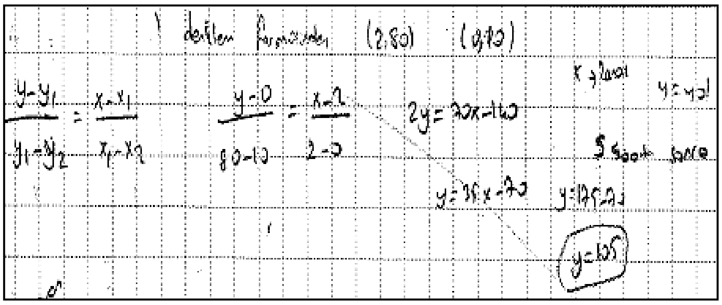


__Figure 4__. S43's response to S_d6

S_f6: Since it is $f(x)+g(x)=fog(x)$ *and* $f(x)=4x+1$, *what is the value of* $g(3)$?

S57, on the other hand, combined both sides of the equation from the left with the $f^{-1}(x)$ function to find the g(x) function. They made a mistake because they thought that the compound operation has distributive property over the addition operation. The operator used by this student $R^{-}_{f}32$: $f^{-1}o\left(f(x)+g(x)\right)=f^{-1}of(x)+f^{-1}og(x)$.

The student's solution is given below (See Figure 5), and in the interview, the student confirmed the use of such an operator:

R: Is that why you thought of it you think? The distributive property of the compound over addition.

S57: I thought so, I have already distributed them one by one, as you can see.

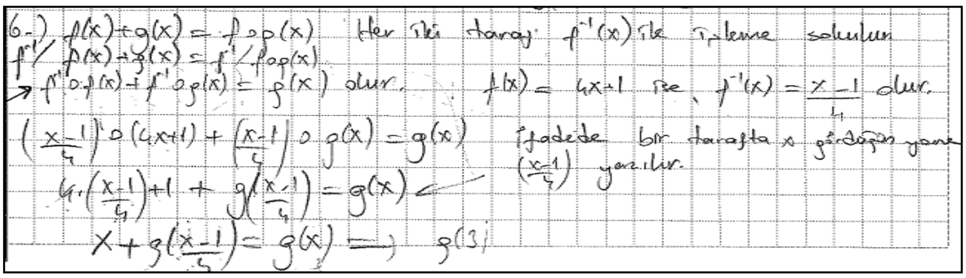


__Figure 5__. S57's response to S_f6

CONCLUSION, DISCUSSION AND RECOMMENDATIONS

In this study, some conceptions have been accessed by modelling students' mathematical knowledge through ck¢ theory. Within the scope of this study, findings have been circumvented with the conception of knowledge transfer and the section of discussion and conclusion has similarly been structured. It is regarded that students who think that the knowledge giving them a correct result in one situation will also give them correct results in other situations have the conception of knowledge transfer. Having examined Table 1, it is seen that operators forming this conception are mostly false operators. This demonstrates that students make mistakes since they think that the knowledge used in one situation giving them the correct result can also be used in every other situation to reach the correct result. On the other hand, it is determined that students who have this conception are also able to get rid of the conundrum encountered in problem-solving by performing this knowledge transfer correctly.

When looking at the operators that form the conception (See Figure 6), it can be suggested that the students, who used the knowledge that "intersection and association operations with sets have distributive property or association property over each other" for the difference operation with sets (R^-_k9, R^-_k16), transferred the knowledge and used it as the knowledge of "there is a distributive property of the difference operation with sets over the association operation or the difference operation with sets has the association property". It is seen that by using the same correct knowledge, they reached the knowledge that "the intersection operation has distributive property over the subset (R^-_k6)". A similar situation is encountered in the compound operation on functions. The students used the equation. $f^{-1}o[(f(x)+g(x)] = f^{-1}o\, f(x) + f^{-1}o\; g(x)$ (R^-_f32) by distributing the compound operation over the addition operation. Here, the fact that the students applied the left-hand distributive property of the compound operation even when there was an addition operation between functions shows that they made mistakes while transferring the knowledge. All these false transfers caused students to find incorrect results.

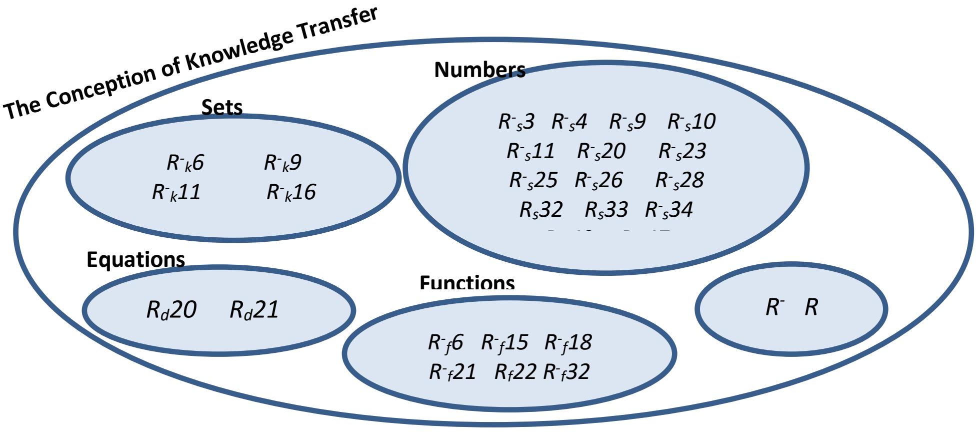
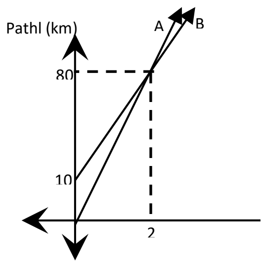


Figure 6. *Operators forming the conception of knowledge transfer*

Another knowledge that students transfer to different situations is about multiplication. The rule of multiplication with rational numbers is used by students from the early years of primary education. This rule that is expressed by putting the number obtained after multiplying the numbers in the dividend to the dividend of the product, and putting the number obtained after multiplying the numbers in the denominator to the denominator of the product, can also be used by students for addition. In this case, the fact that the students taken the rule of $\frac{a}{b}x\frac{c}{d} = \frac{axc}{bxd}$ as correct knowledge for the equation of $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ and used them in the solutions of the questions unearths the knowledge transfer that they made. Yujing and Zhou (2005) stated in their study that some of the students expressed the sum of the operation of $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ as the sum of $\frac{2}{5}$, and suggested that they took the rule given above as correct. Wu (1999), on the other hand, stated in the repeated reports about some university students that it was claimed that such solutions as $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{a}{b+c}$ and $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$were found in students' both homework and exam papers. Kerslake (1986) addressed that there was such a misconception among students in the report of his study on fractions with secondary education students in England (12-14 year-olds). Nevertheless, this situation is consistent with the findings of the Soylu and Soylu's (2005) study on determining the learning difficulties of students in ordering, addition, subtraction, multiplication, and fraction problems; Özçiftci's (2007) study on determining the mistakes made by Year 7 students regarding rational numbers; Biber, Tuna, and Aktaş's (2013) study on determining the misconceptions of Year 5 students in primary education about ordering fractions, addition-subtraction, and multiplication; Okur & Çakmak-Gürel's (2016) study on determining the common misconceptions of Year 6 and 7 students of lower secondary education about fractions; and Kurdal's (2016) study on determining calculations errors in ratio-proportion and fractions in the lower secondary mathematics curriculum. Moreover, Cengiz (2006), in his study with Year 9 students identified that some students had misconceptions of adding and subtracting numerator and denominator whilst adding and subtracting with rational numbers. Also, Soylu and Soylu (2005), in their study with Year 5 students on determining operations with fractions, found that students used the rule of addition, which they previously learnt, in the multiplication operation as well. Therefore, it can be said that these students also have the conception of knowledge transfer. Kara (2021), in her research examining the misconceptions encountered in secondary school mathematics courses in Türkiye, found a particular misconception among many of Year 6 students about fractions that was observed in many studies, and that misconception was *When adding fractions, numerators are added to each other and put in the numerator and denominator are added to each other and put in the denominator.*

Table 2. *Components of the conception of knowledge transfer (P,R,L,Σ)*

Subject	Problem (P)	Operator (R)	Representation (L)	Possible Control Propositions (Σ)
Sets	***Since A and B are two sets, express the set of*** $(A'\backslash B')\cup(A'\backslash B)$ ***in the shortest way possible.***	***R^-_k9: (A\B)∪(A\C)= A\(B∪C) for sets A, B and C.***	Plotting the set(s) given in the question with a Venn diagram Naming sets with capital letters Placing letters representing element/element numbers in intersecting sets Using the appropriate symbol for operations with sets (∩,∪, \)	*Intersection and association operations have distributive property over each other.* *Multiplication operation has distributive property over addition and subtraction.*
Numbers	***If it is*** $a,b,c\in R$ ***and*** $\frac{a-c}{b+c}+\frac{b-a}{c+a}+\frac{c-b}{a+b}1$ ***, then what is*** $\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}$	***R^-_s4: If it is*** $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=x$ ***and*** $\frac{e}{f}+\frac{k}{l}=y$***, it is*** $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{k}{d}}=\frac{x}{y}$.	Slash, addition, division	$\frac{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}\cdot\frac{k}{d}}=\frac{a.c}{e.k}=\frac{x}{y}$
Equations	***S_d6: The paths taken by vehicles A and B depending on time are given in the graph. What is the distance in kilometres between the vehicles 5 hours after meeting?***  	***The equation of a line with two known points as R_d20: (x_1,y_1) and (x_2,y_2) is*** $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$.	Point, coordinate system, line, line equation, line graph, division, subtraction, equation	*The equation of a line with two known points as (x_1,y_1) and (x_2,y_2) is* $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$
Functions	**Since it is** $f(x)+g(x)=fog(x)$ ***and*** $f(x)=4x+1$, ***what is the value of*** $g(3)$?	$f^{-1}o\left(f(x)+g(x)\right)=f^{-1}of(x)+f^{-1}og(x)$.	Function representation, compound, addition, equation	Distributive property
The conception of knowledge transfer	Questions for which the knowledge previously experienced as effective in solving problems, and that is considered to be effective in future problems.	The knowledge experienced to be effective in solving problems in different subjects previously encountered, and that is considered to be effective in future problems	All numbers, symbols, signs, etc. that is used in this conception including related situations as problem, solution, operator, etc.	The knowledge used to prove each operative step taken in during problem solving.

Thus far, examples have been given about the situations in which students transferred their previously acquired knowledge in order to find solutions to the situations that they have just encountered. Thus, the following questions arise: "Can these situations not be otherwise possible?", "Can students not reach the correct solutions by transferring the knowledge correctly?". We can give "*yes*" as an answer to these questions. In fact, since those students who have this conception tend to transfer knowledge, they can get rid of the obstacles that they may encounter in a problem by performing this transfer correctly. For instance, the students who use the operator Rd20, try to solve the question about the line with two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) and reach the equation of $\frac{x-x_1}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{y_1-y_2}$, which means that they transfer the correct knowledge. Similarly, using the R_d21 and R_f22 operator (see Table 1) can be given as an example of correct knowledge transfer. These correct operators can be given as the feature that distinguishes *the conception of knowledge transfer* from *overgeneralisation*, which is one of the types of misconceptions categorised by Graeber and Johnson (1991) (cited in Zembat 2008; p.43) and Ryan and Williams (2007).

Another finding of this study is quite remarkable. When Table 2 is examined, it can be said that the students who have the conception of knowledge transfer are aware of the control structures that they use to explain why they make false transfer when they do it, and/or these structures can be determined by the observer. This finding is consistent with the idea, which Balacheff tried to emphasise while defining the conception, that it would not be realistic to claim that students were completely mistaken in their solutions. When the operators and control structures in the table are examined, it is concluded that the students chose this knowledge to solve the new problems that they encountered, as they had experienced that the operators previously used were effective in solving the problems in different subjects. In this case, it can be said that the control structure component of conception results in the use of false operators by students.

In short, as exemplified above, students tend to use a rule or features that give correct results in a problem situation in other situations as well. The conception of knowledge transfer emerged withinthe classification of the operators used by such students in their solutions. It can be said that this conception occasionally leads students to the correct result, but as a result of the knowledge transfers that they make, it can also be said that they mostly make mistakes thinking that a rule giving the correct result in one situation can lead them to the correct result in another situation. It has also been determined that they use the knowledge that leads them to the right solution, especially in the solutions of different problems, as a control proposition.

In this study, the process of bringing knowledge transfer conception from general mathematical conception of student teachers into the literature was discussed. While exploring these conception, problem situations were used. Teachers, too, can follow a strategy similar to the researcher's strategy, and as Baki (1998) states, while reading their students' written papers or assessing their assignments, they can evaluate not only to give grades, but also to identify the student's deficiencies and mistakes and to find a meaningful aspect of the knowledge that they use while performing the solution. The solution of a problem or the execution of an operation may be in accordance with the logic of the student, their previous knowledge, and their own mathematical thinking, and the student may not know that what they have executed has no mathematical validity (Baki, 1998). In that case, it is necessary to examine the knowledge or conception of students, which is reflected in their solution strategies to enable them to learn more meaningfully and to reveal what kind of mistakes or misconceptions they make (Çalık-Uzun, Arslan, 2016). According to Confrey (1990), if we carefully look for a conception in a wrong answer given by a student, we can find the logical underpinning of that answer (cited in Webber, 2004). Henceforth, it comes to the fore that if the way in which students try to solve a question can be understood, they can be helped to understand mathematics better (Aydın, 2008). According to Niss, if we can understand the ways in which students learn mathematics and the obstacles that hamper these ways, we can better understand how mathematical knowledge is constituted, how it is processed, and how it is used (Niss, 1999). Thus, we can model students' behaviors and have ideas for their future learning. It is thought that this study will help teachers to design learning milieu by being aware of the ways of understanding and thinking that students have while constructing their mathematical knowledge regardless of the subjects.

The list of operators that form the conception identified within this research may seem too long to teachers; however, what matters here is to understand what the conceptions underpinned by these operators mean. On the other hand, teachers can find different operators from these operators and they can decide which one(s) of these operators will be included in these conceptions. In this way, they can determine which of these conceptions their students using these operators have developed. Thus, while planning their classes or designing learning milieu, they can provide the opportunity for more meaningful learning to take place by taking advantage of the conceptions that emerged in this study and that are likely to occur in their own students. In addition, teachers can complete the assessment-evaluation process more effectively with the help of these conceptions. Thinking about conceptions helps mathematical education researchers to shape students' knowledge and guides them to gain perspective on what kind of questions they should ask to students (Webber, Pesty & Balacheff, 2002). With this in mind, they can determine the conceptions developed by their students through the evaluation of the exams that they will prepare in line with these conceptions in order to assess their students.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel Anlayışlarının Ck¢ Teorisine Göre Modellenmesi: Bilgi Transferi Anlayışı[3]

Dr. Öğr. Üyesi Selcen Çalık Uzun
Trabzon Üniversitesi -Türkiye
ORCID: 0000-0002-2178-6642
selcencalikuzun@trabzon.edu.tr

Prof. Dr. Selahattin Arslan
Trabzon Üniversitesi -Türkiye
ORCID: 0000-0001-8557-2507
selahattin.arslan@trabzon.edu.tr

Özet:

Öğrenenlerin zihinlerinde neler olduğu, bilgiyi nasıl yapılandırdıkları, nasıl kullandıkları gibi sorular araştırmacılar için her zaman merak konusu olmuştur. Bu sorulara açıklık getirmek amacıyla, çeşitli teorilerden yararlanılarak birçok araştırma yapılmaktadır. Bu çalışmada ise sınıf öğretmeni adaylarının temel matematiksel bilgilerini Ck¢ teorisinin anlayış aşamasına göre incelemek amaçlanmıştır. Nitel araştırma yöntemine uygun olarak tasarlanan çalışmanın verileri; öğretmen adaylarına uygulanan sınavlar ve yapılan klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarını belirlemek için Küme, Denklem, Fonksiyon ve Sayılar konularında hazırlanan sınavlar 61 sınıf öğretmeni adayına uygulanmış, sınavların ardından 26 öğretmen adayı ile mülakatlar yürütülmüştür. Uygulanan sınavlarda sorulan soruların ayrıntılı analizi yapılarak öğretmen adaylarının bu soruları çözerken kullandıkları her türlü bilgi belirlenmiştir. cK¢ teorisinin anlayış aşamasında "operatör" olarak ifade edilen bu bilgilerin, birbirleri ile ilgili olanlarının sınıflanmasıyla, adayların sahip oldukları genel matematiksel anlayışlara ulaşılmıştır. Bu çalışmada belirlenen anlayışlardan bilgi transferi anlayışı tanıtılmıştır. Bu anlayış bize, öğrencinin problemleri çözerken yaptıklarının matematiksel geçerliliğinin olmadığını fark etse bile, kendi mantığına, önceki birikimlerine, kendi matematiksel düşüncesine uygun düşen bilgileri kullanma eğiliminde olduğunu göstermektedir. Bu nedenle öğrencilerin matematiksel düşünme biçimlerini ortaya koyması ve öğretmenlerin öğrenme ortamlarını tasarlarken nelere dikkat etmesi gerektiğini göstermesi açısından alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar kelimeler: *Ck¢ teorisi, Anlayış, Bilgi transferi anlayışı, Sınıf öğretmeni adayları*

E-Uluslararası Eğitim Araştırmaları Dergisi

Cilt: 14, No: 1, ss. 71-95

Araştırma Makalesi

Received: 2022-08-31
Accepted: 2023-01-05

Önerilen Atıf

Çalık-Uzun, S., Arslan, S. (2023). Öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının ck¢ teorisine göre modellenmesi: bilgi transferi anlayışı, *E-Uluslararası Eğitim Araştırmaları Dergisi,* 14(1), 71-95. DOI: https://doi.org/10.19160/e-ijer.1168980

[3] Bu çalışma ilk yazarın doktora tezinden üretilmiştir (Çalık-Uzun, 2012).

Genişletilmiş Özet

Problem: Harel ve Sowder (2005) ileri matematiksel düşünmeyi tanımlarken, anlama biçimi ve düşünme biçimi olarak ifade ettikleri iki kavramdan bahsetmektedirler. Anlama biçimini tanımlarken, öğrencilerin bir terime, cümleye veya metne yükledikleri anlam, bir probleme ürettikleri çözüm veya bir iddiayı doğrulamak veya çürütmek için kullandıkları gerekçelere vurgu yapan araştırmacılar, öğrencilerin bu eylemlerin altında yatan -örtük veya açık- genel fikirlerini ise düşünme biçimleri olarak ifade etmektedirler. Buradan hareketle bir öğrencinin belli bir matematiksel duruma özgü olarak yaptığı akıl yürütmeleri anlama biçimini, benzer nitelikteki birçok durumda kullanılan akıl yürütmelerinin ise düşünme biçimi resmedebileceğini düşünebiliriz (Çelik, 2016). Harel ve Sowder (2005) öğretmenlerin genellikle anlama yollarına odaklandıklarını; ancak öğrencilerin sahip olduğu bu anlama yollarının, etkili düşünme yolları oluşturmalarına yardımcı olma hedefini gözden kaçırdıklarını ifade etmişlerdir. Bu nedenle öğrencilerin anlama ve düşünme biçimlerini ortaya koymak önemlidir. Öte yandan öğrencilerin anlama biçimlerini resmetmek ve bu sayede düşünme biçimlerini ortaya koyabilmek; öğrencilerin yapmış olduğu etkinlikleri gözlemlemek, problem durumlarını nasıl analiz ettiklerini ve hangi bilgileri kullanarak çözüm ürettiklerini tespit etmek ile mümkündür. Bu bağlamda çalışma öğrencilerin matematiksel bilgiyi nasıl yapılandırdıkları, farklı konulardaki benzer düşünme biçimlerinin neler olduğu sorularına cevap bulma amacı taşımaktadır. Bu çalışmada öğrencilerin matematiksel anlayışlarını ortaya koymak için öğrenciler farklı konularda problemlerle karşı karşıya getirilmiş, problemleri çözerken kullandıkları her türlü bilgi belirlenerek bu bilgiler sınıflandırılmıştır. Bu süreçte cK¢ teorsinin anlayış aşamasının kullanılmasının uygun olacağına karar verilmiştir. Nitekim öğrencilerin problemleri çözerken kullandıkları bilgiler (operatörler) anlama biçimlerini, bu bilgilerden benzer olanların sınıflandırılmasıyla oluşan anlayışların ise onların düşünme biçimlerini belirmemizi sağlayacağı düşünülmektedir.

Bireyin bilgiyi yapılandırması, yeni karşılaşılan her kavramda çok küçük yaşlardan başlayarak ileri seviyelere kadar devam etmektedir. Sınıf öğretmenlerinin her bireyin hayatında özel bir yeri ve geleceği şekillendirmede önemli bir misyonu olduğu kabul edilmektedir. Hizmete başlamadan önce bu öğretmenlerin de bilgiyi nasıl yapılandırdıklarının ortaya koyulabilmesi, matematiksel anlayışlarının belirlenmesi gerekmektedir. Nitekim eğitim öğretim sürecinin ilk kademesi olması nedeniyle öğrencinin model olarak aldığı sınıf öğretmenlerinin niteliği son derece önemlidir. Ancak Toluk Uçar (2011), yapılan birçok araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının ilkokul düzeyinde öğretim yapabilmeleri için yetersiz olduğunun vurgulandığını belirtmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının gelişmesinde öğrenim hayatları boyunca aldıkları matematik derslerinin önemi düşünüldüğünde, bu anlayışların ortaya çıkarılabilmesi için bu derslerde gördükleri temel kavramların iyi analiz edilmesi gerekmektedir. Bu bağlamda öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarının matematiğin yapı taşını oluşturan Küme, Sayı, Denklem ve Fonksiyon konularının yardımıyla resmedilebileceği düşüncesi bu çalışmanın temelini oluşturmaktadır.

CK¢ Teorisi[4], Balacheff'in (2000) öğrenme ortamlarını tasarlarken yararlanılacak bir araç olması adına, öğrencilerin "anlamalarını anlamak" için geliştirildiğini bir teoridir. Bu teori "Anlayış (conception)", "Bilme (Knowing)" ve "Kavram (Concept)" olarak ifade edilen hiyerarşik üç aşamadan oluşmaktadır. Bu araştırma öğrencilerin matematiksel anlayışlarını ortaya çıkarmayı amaçladığından teorinin anlayış aşamasına odaklanılmış olup bu aşama aşağıda kısaca açıklanmıştır.

Balacheff (2000) anlayışı öğrencilerin doğru ya da yanlış kendi öğrenme deneyimlerinin bir ürünü olarak ifade etmekte ve insan beyninin içinde meydana gelen olaylarla ilgili çok fazla bilgiye sahip olmadığımızı belirterek, bu konuda gözlemleyebildiklerimizin başlangıç noktamızı oluşturabileceği fikrini önermektedir. Bu başlangıç noktasını, özelliklerini belirleyebildiğimiz bir ortamda meydana gelen bir etkinlik sırasında belirlenebilen davranışlar olarak tanımlayan Balacheff, bu davranışlar yardımıyla ortaya konulabilecek olan anlayışı aşağıdaki 4 bileşenle karakterize etmektedir.

Anlayış C;

P: Problemler kümesi

[4] cK¢ kısaltması İngilizce Conception, Knowing ve Concept kelimelerinin ilk harflerinden oluşmaktadır. İlk ve son kelimelerin baş harfleri aynı olduğundan karışmalarını önlemek için ikinci c harfinin üzerine bir kesme işareti konulmuştur.

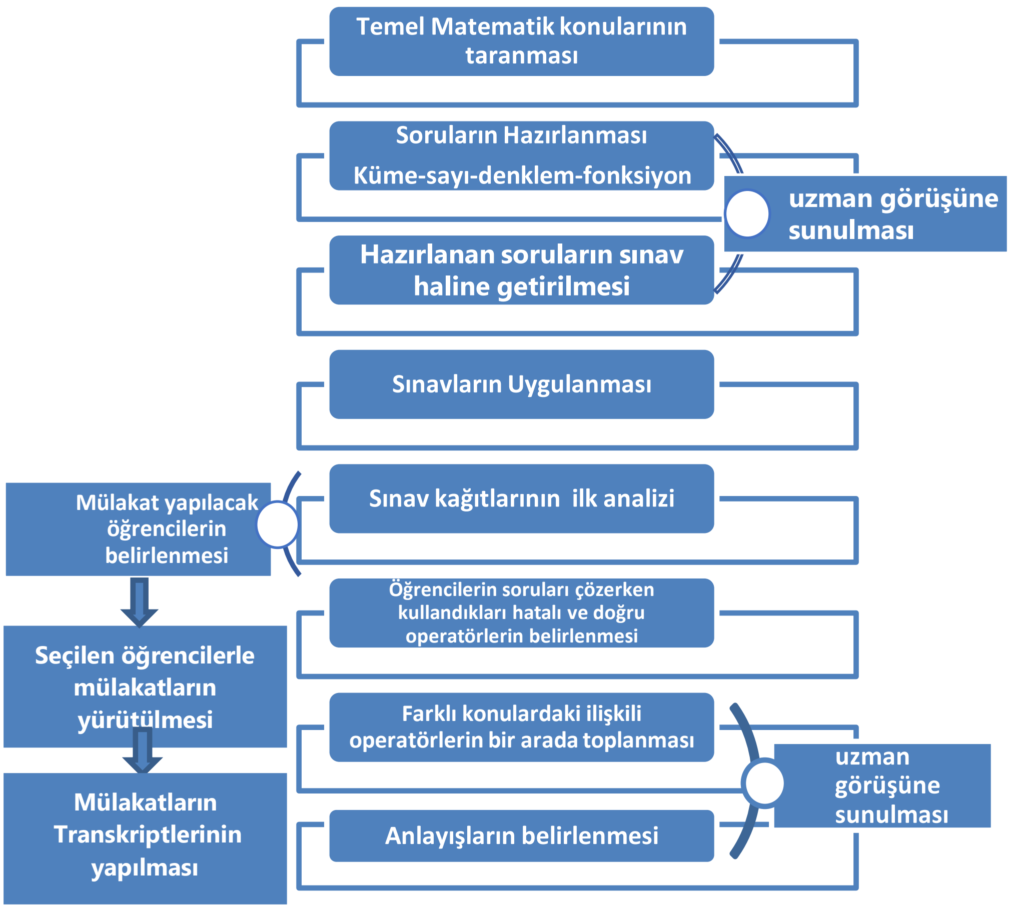
R: Operatörler kümesi
L: Gösterim sistemi
Σ: Kontrol bilgisi
olmak üzere C(P, R, L, Σ) dörtlüsü ile tanımlanmaktadır.

P problemler kümesi; anlayışın uygulama alanıdır (Balacheff, 2000; Balacheff ve Gaudin, 2002). Başka bir ifadeyle anlayışın anlamlı olduğu problemler kümesi olarak tanımlanabilir. Bir örnekle ifade etmek gerekirse, "ondalık sayılar toplanırken virgülden önceki ve sonraki sayılar ayrı ayrı toplanır ve virgül ile ayrılır" anlayışının uygulama alanı ondalık kesir sayılarıyla ilgili toplama işlemini gerektiren sorulardır. Bu durumda bu anlayışın problemler kümesi, ondalık sayılarla toplama işleminin yapıldığı bütün problemleri kapsamaktadır. **Operatörler kümesi R** ise P'deki problemleri çözüme kavuşturmak için kullanılan işlemler, kurallar, teoremler (Webber, 2004), başka bir ifadeyle çözüme ulaşmak için öğrencilerin kullandığı her türlü bilgi olarak düşünülebilir. Operatörler işlemin doğrudan yapılmasına izin verecek şekilde "somut" olabileceği gibi dilbilimsel, sembolik ya da grafiksel temsillere dönüşümüne izin verecek şekilde "soyut" olabilirler (Balacheff ve Gaudin; 2002). Operatörler, öğrencilerin gerçekleştirdiği çözümde yer almaktadır. O halde öğrenciler bir dizi operatör kullanarak çözümlerini gerçekleştirirler (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002).

Operatörler genellikle "Eğer, ...ise.....dir" kalıbı ile ifade edilirler. "(Eğer) f: R→R fonksiyonunda ∀ x∈R için f (x) =x ise f fonksiyonu birim fonksiyondur" ifadesi operatöre örnek verilebilir. Anlayışın üçüncü bileşeni **gösterim sistemi olarak isimlendirilen L**; P problemler kümesi ve R operatörler kümesinde kullanılan her türlü grafik, sembol, simge vb. gösterimlerden oluşmaktadır. Diğer bir ifadeyle problemlerin ifade edilmesi ve çözülmesinde gerekli ihtiyacı karşılayan, operatörlerin kullanımına izin veren, cebirsel dil, geometrik çizim, doğal dil, vb. gösterim sistemleri L kümesini oluşturur (Balacheff ve Gaudin; 2002). Anlayışın son bileşeni ise; işlemlerin doğruluğunu denetleyen **kontrol bilgileri (Σ)** olarak ifade edilebilir. Seçim yapmak, karar almak ve yargıda bulunmak için gerekli bütün araçlar bu bileşeni oluşturmaktadır (Balacheff ve Gaudin; 2002). Öğrenciler problem çözerken kullanacakları işlemleri seçerler, yaptıkları eylemlerin geçerliğini denetlerler ve sonuca ulaşırlar. İşte bu üç aşamanın her biri kontrol bilgilerinin rehberliğinde gerçekleşmektedir (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Bu boyut, problemi çözmek için kullanılacak işlemlerin uygun olup olmadığına, verilen problemin çözülüp çözülemeyeceğine karar vermeyi ya da bir matematiksel kavramın anlaşılmasında rol oynayan en can alıcı öğelerin farkına varmayı sağlayan kriterlerin uygulandığı bir boyut olmasına karşın çoğu zaman üstü kapalı bırakılmıştır (Balacheff, Gaudin; 2002). Bu duruma neden olarak, kontrol bilgilerinin öğrencilerin çözümlerinde gizli olduğu ve öğrencilerin de bunları çoğu zaman farkında olmadan kullandıkları düşüncesi gösterilebilir.

Balacheff (2000)'in öğrencilerin "anlamalarını anlamak" için öğrenme ortamlarını tasarlarken yararlanılacak bir araç olarak geliştirdiği cK¢ Teorisini açıklandığı şekilde karakterize edilen anlayış aşaması, bu çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel anlayışlarını belirlemede araç olarak kullanılmıştır. Farklı matematik konularında sorulan sorular belirlenen anlayışların problem kümesini, adayların bu soruları çözerken kullandıkları bilgiler operatörlerini oluşturmuştur. Birçok teori öğrencilerin zihinlerinde bilginin nasıl oluştuğu sorusuna cevap ararken kavramların oluşumuna odaklanmıştır. Ancak bu çalışma, öğrencilerin konulardan bağımsız olarak genel matematiksel düşünme biçimlerini ortaya koymayı amaçladığından bu amaca ulaşmak için teorinin yaygın kullanımının dışına çıkılması gündeme gelmiştir. Bu bağlamda cK¢ Teorisinin anlayış aşamasının kavram odağından sıyrılarak kullanılabileceği düşünülmüştür. Öğrencilerin kullandıkları operatörler anlama biçimlerini, bu operatörlerin sınıflandırılmasıyla elde edilen anlayışların düşünme biçimlerini ortaya koyacağı düşüncesi ile hareket edilmiştir. Bu bağlamda adaylarının temel matematiksel bilgilerini cK¢ teorisinin anlayış modeline göre inceleyerek, bu model ışığında onların sahip oldukları matematiksel anlayışları belirleme amacı taşıyan araştırmada öğretmen adaylarının konulardan bağımsız olan genel matematiksel anlayışları nelerdir?" şeklinde yapılandırılan probleme cevap aranmıştır.

Yöntem: Öğretmen adaylarının anlayışları doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konulmaya çalışıldığından (Yıldırım ve Şimşek, 2008) çalışma doğası gereği nitel bir çalışmadır. Ayrıca araştırılmak istenen problemin var olan durumunu kendi koşulları içerisinde ve olduğu gibi inceleme ve ilerisi için yordama şansı doğurduğu için betimsel nitelik taşımaktadır (Karasar, 2009).



Şema 1. Araştırma süreci

Çalışma, Doğu Karadeniz Bölgesi'ndeki bir üniversitede öğrenim gören, Sınıf Öğretmenliği Programı birinci sınıfına kayıtlı 61 öğrenci ile yürütülmüştür. Problem kümesinin belirlenmesinden, anlayışların sınıflandırılmasına kadar geçen süreç Şema 1'de verilmiştir.

Araştırmanın verileri yazılı sınavlar ve öğrencilerle yapılan klinik mülakatlar yardımıyla toplanmıştır. Yazılı sınavlar ilk 3'ü güz döneminde 2'si bahar döneminde olmak üzere toplam 5 oturumda gerçekleştirilmiştir. Sınavların içerikleri ile toplam soru sayıları şu şekildedir: Kümeler (Kümelerle işlemler, küme problemleri) 12 soru; Sayılar (Doğal Sayılar, Tam Sayılar, Rasyonel Sayılar, Reel sayılar, Üslü ve Köklü Sayılar) 18 soru; Denklemler (Cebirsel İfadeler, Çarpanlara Ayırma, Birinci Dereceden Denklemler) 7 soru; Fonksiyonlar (Fonksiyon olma şartları, tanım-değer kümesi, ters fonksiyon, bileşke fonksiyon, parabol) 11 soru.

Şema 1 de görüldüğü gibi sınavların uygulamasının ardından sınav kâğıtlarının ilk analizi yapılmış ve öğrencilerin soruları çözerken kullandıkları operatörler ve eş zamanlı olarak da mülakat yapılacak öğrenciler belirlenmiştir. Daha sonra öğretmen adaylarının sahip oldukları anlayışları belirleyebilmek için her öğrencinin tüm sorulara verdiği cevapların detaylı analizi yapılarak, çözüm sırasında kullanılan operatörler belirlenmiş, elde edilen operatörler öğrencilerle yapılan mülakat verileri ile desteklenerek ilgili konuda sorulan soruların analizi boyunca sıralanmıştır.mHer bir konuya ait olarak anlatılan şekilde belirlenen operatörlerden benzer olanlar sınıflandırılarak üst bir başlık altında kodlanmıştır. Bu üst başlıklar aynı zamanda öğrencilerin sahip oldukları anlayışlar olarak belirlenmiştir.

Çalışmada operatörler, iki farklı şekilde gösterilmiştir: $\mathbf{R_s41}$ ve $\mathbf{R^-_d10}$. Doğru olduğu halde hatalı olarak kullanılabilen operatörler için ayrıca bir gösterim belirlenmemiş, bu durum; 'operatör hatalı kullanılmıştır' şeklinde belirtilmiştir. Örneğin, R_s41 (Karekökten kurtarmak için kare alma) operatörünün sayılar konusunda belirlenen 41. operatör olduğu, aksi belirtilmedikçe doğru olarak kullanıldığı anlaşılmaktadır. Eğer operatör yanlış kullanılmışsa bu durum ayrıca belirtilmiştir.

Diğer yandan denklemler konusuna ait onuncu operatör olan $R^{-}_{d}10$ (ax+b=y cebirsel ifadesi düzlemde bir dörtgen belirtir) her zaman hatalı olarak kullanılan bir operatördür ve üst indiste yer alan "–" sembolü, her zaman hatalı olduğunu belirtmektedir.

Bir operatörün farklı konularda görülmesi durumda ise operatör bulunduğu konuya göre indislenmiş ancak operatörün açıklaması (ifadesi) mümkün olduğunca korunmaya çalışılmıştır:

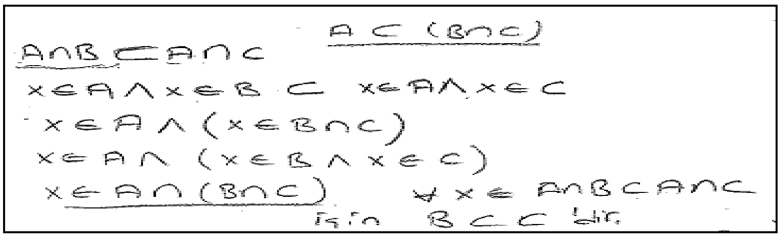
$R^{-}_{d}23$: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme

$R^{-}_{k}4$: İstenene ulaşırken verilenlerden bazılarını ihmal etme

Veri analizi sürecinin okuyucu tarafından iyi anlaşılması çalışmanın da anlaşılması açısından önem taşımaktadır. Bu nedenle bir örnekle açıklamak uygun olacaktır. Ö34 kodlu öğrencinin kümeler konusu ile ilgili olarak sorulan üçüncü soruya verdiği cevabın analizi ve kendisi ile yapılan mülakat verilerinin bu analizi destekleyici olarak kullanılmasına ilişkin bir örnek seçilmiştir.

S_k1: $A \cap B \subset A \cap C \Rightarrow B \subset C$ olup olmadığını Venn şemasıyla ve tanımları kullanarak gösteriniz.

Öncelikle öğrencinin yapmış olduğu her adım incelenmiş ve A kümesinin her iki ifadede ortak olduğunu fark edip, bu kümenin parantezine aldığı yani kesişim işleminin alt küme üzerine dağılma özelliği olduğu bilgisini kullanarak soruyu çözdüğü düşünülmüştür. Öğrenci ile sınavdan sonra çözümü ile ilgili olarak yapılan ve aşağıda verilen mülakat verileri de bu durumu destekler nitelikte olduğundan öğrencinin; kesişim işleminin, alt küme üzerine dağılma özeliği olduğunu düşünerek $A \cap B \subset A \cap C$ ifadesini $A \cap (B \subset C)$ şeklinde düzenlediği ve bu duruma uygun operatör ise; $R^{-}_{k}6$= A, B ve C kümeleri için $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir, olarak belirlenmiştir. Öğrenci ile araştırmacı arasında geçen diyalog aşağıdaki gibidir.



Şekil 1. Ö45'in S_k1'e verdiği cevap

Ö45: Bunları; A∩B ifadesini açtım. Ayrı ayrı A∩ B şeklinde açtım. Bunu da A ∩ C şeklinde açtım. Zaten burada alt kümesi falan demiş ya

A: Evet.

Ö45: Sonra bunları hepsinde x∈A ortak olduğu için o şekilde yazdım.

A: O zaman sen x∈A parantezine aldın. Ama sonra bu birdenbire B∩C mi oldu yoksa B⊂C mi yazacaktın?

Ö45: Aslında B∩C olmaz. Çünkü x∈A yı ortak alırsam burayı B⊂C yapmam gerekiyordu.

A: Yani sonuç olarak; kesişim işleminin alt küme üzerinde dağılma özelliği vardır bilgisini kullandığını söylüyorsun.

Ö45: Evet.

O halde öğrencinin kullandığı operatör, $R^{-}_{k}6$= A, B ve C kümeleri için $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir bilgisidir. Bu bilginin bu sorunun çözümünde öğrenciyi hata yapmaya götürdüğü açıktır ancak öğrencilerin önceki öğrenmeleri düşünüldüğünde zihninde yerleşen bu "kesişim işleminin, alt küme üzerine dağılma özeliği olduğunu bilgisinin, her zaman doğru sonuç veren "kümelerle kesişim işleminin birleşme işlemi üzerine dağılma özelliği vardır" bilgisinden hareketle dağılma özeliğini alt kümeye transfer edilmesi durumu düşünülmektedir. Bu nedenle bu operatör, bilgi transferi anlayışının bir operatörü olarak sınıflandırılmıştır.

Klinik mülakatlardan elde edilen nitel veriler betimsel olarak analiz edilmiştir. Sınavların sonunda gerçekleştirilen klinik mülakatlar transkript haline getirilerek öğrencilerin kullandıkları operatörleri desteklemek için kullanılmıştır. Her bir mülakat öncelikle yazıya dökülmüş, daha sonra öğrencilerin sınav kağıtlarının incelenmesi ile kullandıkları belirlenen operatörleri destekleyecek ifadeler ayıklanmıştır. Bu doğrudan alıntılara bulgular kısmında, ilgili operatörü desteklemek, okuyucuya gerçekçi bir resim sunmak, kendi yorumlarını yapma ve bazı çıkarımlarda bulunabilme fırsatı vermesi bakımından (Yıldırım ve Şimşek, 2009) yer verilmiştir.

Çalışmada güvenirliği artırmak için üç uzmandan görüş alınmıştır. Bu uzmanlardan biri ile gerek öğrencilerin çözümlerinden ve onlarla yapılan klinik mülakat verilerinden hareketle kullandıkları belirlenen operatörler, gösterimler ve kontrol bilgileri gerekse farklı konulardaki benzer operatörlerin sınıflanmasıyla elde edilen anlayışlar oluşturulurken etraflıca tartışılmıştır. Öğrencilerin anlayışlarını belirleyene kadar geçen veri analizi süreci oldukça zaman alıcı ve yorucu bir süreç olduğundan diğer iki uzmandan anlayışlar oluşturulduktan sonra görüş (onay) alınmıştır. Ayrıca veri analizi sürecinde zaman çeşitlemesi yapılmıştır. Elde edilen veriler araştırmacı tarafından belli zaman aralıklarında tekrar tekrar incelenerek son haline getirilmiş ve bulgularda sunulmuştur.

Bu çalışma daha geniş kapsamlı bir çalışmanın sınırlı sonuçlarını sunmaktadır. Sınıf öğretmeni adaylarının, farklı konular kapsamında sorulan sorularda kullandıkları operatörlerin sınıflandırılmasıyla sahip oldukları birçok anlayış belirlenmiştir (Çalık Uzun, 2012). Mevcut çalışma ise bu anlayışlardan "bilgi transferi anlayışı" ile sınırlandırılmıştır.

Sonuçlar; Çalışmada öğretmen adaylarının genel matematiksel anlayışlarını belirlemek amacıyla hazırlanan sınavlar uygulandıktan sonra, sınav kağıtlarının detaylı incelemesi yapılmıştır. İnceleme sırasında belirlenen operatörlerden ilgili olanlar bir araya getirilerek öğrencilerin genel matematiksel anlayışlarına ulaşılmıştır. Bir problem durumunda doğru olarak sonuç veren bir bilginin başka bir problem durumunda kullanılmasını içeren operatörlerin sınıflanmasıyla oluşturan bilgi transferi anlayışının operatörleri Tablo 1'de verilmiştir.

Herhangi bir durumda onları doğru sonuca götüren bir bilginin başka durumlarda da doğru sonuç vereceğini düşünen öğrencilerin bilgi transferi anlayışına sahip oldukları düşünülmektedir. Tablo1 incelendiğinde bu anlayışı oluşturan operatörlerin çoğunlukla hatalı olduğu görülmektedir. Bu durum bize öğrencilerin, bir bilgiyi kullanırken bu bilginin kullanılabildiği her koşulda onları doğru sonuca götüreceğini düşünerek hata yaptıklarını göstermektedir. Öte yandan bu anlayışa sahip olan öğrencilerin, bilgiyi transfer etme eğiliminde oldukları için karşılaştıkları problemde çıkmaza düştükleri zaman bu transferi doğru olarak gerçekleştirerek bu çıkmazdan kurtulabildikleri de belirlenmiştir.

Anlayışı oluşturan operatörlere bakıldığında (Bkz. Tablo 1) öğrencilerin "kümelerle kesişim ve birleşim işlemlerinin birbiri üzerine dağılma özelliği veya birleşme özelliği olduğu" bilgisini kümelerle fark işlemi için kullanarak (R^-_k9, R^-_k16), yapmış oldukları bilgi transferi ile "kümelerle fark işleminin birleşme işlemi üzerine dağılma özelliği vardır veya kümelerle fark işleminin birleşme özelliği vardır" bilgilerini kullandıkları söylenebilir. Yine aynı doğru bilgiyi kullanarak "kesişim işleminin alt küme üzerine dağılma özelliği vardır (R^-_k6)" bilgisine ulaştıkları görülmektedir. Benzer durum fonksiyonlar konusundaki bileşke işleminde de karşımıza çıkmıştır. Öğrenciler bileşke işlemini toplama işlemi üzerine dağıtarak $f^{-1}o[(f(x) + g(x)] = f^{-1}o\, f(x) + f^{-1}o\, g(x)$ (R^-_f32) eşitliğini kullanmışlardır. Burada öğrencilerin bileşke işleminin soldan dağılma özelliğini fonksiyonlar arasında toplamı işlemi varken de uygulamış olmaları bilgiyi transfer ederken hata yaptıklarını göstermektedir. Tüm bu hatalı transferler öğrencilerin yanlış sonuç bulmalarına neden olmuştur.

Öğrencilerin farklı durumlara transfer ettiği diğer bir bilgi çarpma işlemi ile ilgilidir. Rasyonel sayılarla çarpma işleminin kuralı ilköğretim ilk kademeden itibaren öğrenciler tarafından kullanılmaktadır. Payda bulunan sayıların çarpılarak, çarpımın payına; paydada bulunan sayıların çarpılarak çarpımın paydasına yazılması şeklinde ifade edilen bu kural öğrenciler tarafından toplama işlemi için de kullanılabilmektedir. Bu durumda öğrencilerin $\frac{a}{b}x\frac{c}{d} = \frac{axc}{bxd}$ şeklindeki kuralı $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ eşitliği için de doğru kabul ederek soruların çözümlerinde kullanmış olmaları yaptıkları bilgi transferini gözler önüne sermektedir. Yujing ve Zhou (2005) çalışmalarında bazı öğrencilerin $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ toplamını $\frac{1}{5}$ olarak yazdıklarını, dolayısıyla yukarıda verilen kuralı doğru kabul ettiklerini ifade etmişlerdir.

Tablo 1. *Bilgi transferi anlayışının operatörleri*

	BİLGİ TRANSFERİ ANLAYIŞI OPERATÖRLERİ
Operatör simgesi	**Operatörün Açıklaması**
$R^{-}_{k}6$	A, B ve C herhangi üç küme ise $(A \cap B) \subset (A \cap C) = A \cap (B \subset C)$ dir.
$R^{-}_{k}9$	A, B ve C herhangi üç küme ise $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$ dir.
$R^{-}_{k}11$	A ve B herhangi iki küme ise $(A'/B') = (A/B)'$ dir.
$R^{-}_{k}16$	A, B ve C herhangi üç küme ise $(A \setminus B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ dir.
$R^{-}_{k}18$	Kümelerle fark işlemini, tam sayılarla çıkarma işlemi olarak düşünme
$R^{-}_{k}24$	A ve B herhangi iki küme ise $s(A' \cup B') = s(A') + s(B')$ dir.
$R^{-}_{s}3$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ dir.
$R^{-}_{s}4$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = x$ ve $\frac{e}{b} + \frac{k}{d} = y$ ise $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{b}+\frac{k}{d}}$ ve $\frac{a}{e} + \frac{c}{k} = \frac{x}{y}$ dir.
$R^{-}_{s}9$	$\frac{x}{y} + \frac{x}{z} = t \Rightarrow \frac{y}{x} + \frac{z}{x} = \frac{1}{t}$ dir.
$R^{-}_{s}10$	$(a+b)^n = a^n + b^n$ dir,
$R^{-}_{s}11$	Tam sayılarla bölme işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, yani x, y, z $\in Z$ ise (x : y) + (x : z) = t ise x : (y + z) = t dir.
$R^{-}_{s}20$	$a.x^n + b.y^n = (x.y)^n.(a+b)$ dir.
$R^{-}_{s}23$	x,y,a $\in Z$, $x - a \mid y \;\Rightarrow\; x \mid y + a$ dır.
$R^{-}_{s}25$	a, b, x $\in \Re$, a < b-x < c ise a <b-c < x dir.
$R^{-}_{s}26$	$\frac{a}{b} =$ c ise –c <$\frac{a}{b}$<c yazılabilir.
$R^{-}_{s}28$	$a.x^n.b.x^n = (a+b).x^n$ dir.
$R_{s}32$	Logaritmadan faydalanma
$R^{-}_{s}33$	$a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$ dir.
$R^{-}_{s}34$	$(a^n.b)^m = (a.b^n)^m = a.b^{n.m}$ dir.
$R^{-}_{s}43$	$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$ dir.
$R^{-}_{s}47$	c $\in$ Z olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-c}$ dir.
$R_{d}20$	(x_1, y_1) ve (x_2, y_2) şeklinde iki noktası bilinen doğrunun denklemi $\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$ dir.
$R_{d}21$	(x_1, y_1) şeklinde bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi $y - y_1 = m(x - x_1)$ dir.
$R^{-}_{f}6$	Bir g bağıntısının grafiği x ve y eksenlerini kesiyorsa o bağıntı fonksiyon belirtir.
$R^{-}_{f}15$	f: R\{a}→ R\{b} tanımlı bir fonksiyon ise limf(x)=a dır ve b fonksiyonun paydasını sıfır yapar.
$R^{-}_{f}18$	Bir f fonksiyonu birebir ve örten ise $f(x)=f^{-1}(x)$ dir.
$R^{-}_{f}21$	f: A→B bir fonksiyon olmak üzere $f \circ g$, f ve g arasında aritmetik işlemler yardımıyla tanımlanır.
$R_{f}22$	f: R→R, fonksiyonu için $f'(x_0)=0$ olmak üzere $(x_0, f'(x_0))$ fonksiyonun maksimum noktasıdır.
$R^{-}_{f}32$	$f^{-1} o[(f(x) + g(x)] = f^{-1} o\, f(x) + f^{-1} o\, g(x)$ dir.

Bu anlayışa sahip olan öğrenciler bilgiyi transfer etme eğiliminde oldukları için karşılaştıkları problemde çıkmaza düştükleri zaman bu transferi doğru olarak gerçekleştirerek bu çıkmazdan kurtulabilmektedirler. Örneğin; R_d20 (bkz. Tablo 1) operatörünü kullanan öğrencilerin soruyu çözmeye çalışmaları doğru bilgi transferi yaptıkları anlamı taşıyabilir. Benzer şekilde R_d21 ve R_f22 operatörleri doğru bilgi transferine örnek olarak verilebilir. Bu sayılan doğru operatörler, bilgi transferi anlayışını, Graeber ve Johnson (1991) (Akt, Zembat 2008; s.43) ve Ryan ve Williams (2007) tarafından kategorilendirilen kavram yanılgısı türlerinden biri olan ve aşırı genellemeden ayıran özellik olarak verilebilir.

Çalışmanın bulgularından hareketle ulaşılan sonuçlardan bir diğeri oldukça dikkat çekicidir. Bilgi transferi anlayışına sahip olan öğrencilerin hatalı transfer yaptıklarında bu transferi neden yaptıklarına yönelik olarak kullandıkları kontrol bilgilerinin farkında oldukları ve/veya bu bilgilerin gözlemci tarafından belirlenebildiği söylenebilir. Bu sonuç Balacheff'in anlayış kavramını tanımlarken vurgulamaya çalıştığı, öğrencilerinin çözümlerinde tamamıyla hatalı davrandıkları iddiasında bulunmanın gerçekçi olmayacağı düşüncesi ile örtüşmektedir. Belirlenen operatörler ve kontrol bilgileri incelendiğinde öğrencilerin kullandıkları operatörlerin daha önceden karşılaşılan farklı konu alanlarındaki problemlerde etkili olduğunu deneyimledikleri için bu bilgileri karşılaştıkları yeni problemleri çözmek için seçtikleri sonucuna ulaşılmaktadır. Bu durumda anlayışın kontrol bilgisi bileşeninin öğrencilerin hatalı operatörler kullanmasına sebep olduğu söylenebilir.

Elde edilen bulgulardan hareketle bilgi transeri anlayışını oluşturan bileşenlerin açıklamaları Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Bilgi transferi anlayışının bileşenlerinin açıklaması

	Problem (P)	Operatör (R)	Gösterim (L)	Muhtemel Kontrol Önermeleri (Σ)
Bilgi transferi anlayışı	Daha önceden karşılaşılan farklı konu alanlarındaki problemlerde etkili olduğu deneyimlenen ve karşı karşıya kalınan yeni problemlerde de kullanışlı olacağı düşünülen bilginin kullanılabileceği türde sorular	Daha önceden karşılaşılan farklı konu alanlarındaki problemlerde etkili olduğu deneyimlenen ve karşı karşıya kalınan yeni problemlerde de kullanışlı olacağı düşünülen bilgi	Anlayışın ilişkili olduğu problem, çözüm, operatör vb. durumlarda kullanılabilecek her türlü sayı, sembol, işaret, ifade vb.	Anlayışın ilişkili olduğu problemleri çözerken yapılan tüm işlem basamaklarını doğrulamak için işe koşulan bilgi

Öneriler; bu araştırmada sınıf öğretmeni adaylarının genel matematiksel anlayışlarından bilgi transferi anlayışının alanyazına kazandırılma süreci ele alınmıştır. Bu anlayışa ulaşılırken problem durumlarından yararlanılmıştır. Öğretmenler de araştırmacının izlediği yola benzer bir yol izleyebilir, Baki'nin (1998) de belirttiği gibi öğrencilerinin yazılı kağıtlarını okurken ya da ödevlerini değerlendirirken sadece not vermek için değil, öğrencinin eksiklerini, yanılgılarını belirlemek, çözümü gerçekleştirirken kullandıkları bilgilerin anlamlı bir yönünü bulmaya çalışarak değerlendirebilirler. Bir problemin çözümü veya bir işlemin yürütülmesi öğrencinin mantığına, önceki birikimlerine, kendi matematiksel düşüncesine uygun düşebilir ve öğrenci yaptıklarının matematiksel geçerliliğinin olmadığını da bilmeyebilir (Baki, 1998). Bu durumda öğrencilerin çözüm stratejilerine yansıyan bu bilgileri veya anlayışları ortaya konulmalıdır. Confrey (1990)'e göre, eğer biz bir öğrencinin verdiği yanlış bir cevapta dikkatlice bir anlayış ararsak, o cevabın mantıklı tarafını keşfedebiliriz (Akt. Webber, 2004). O halde öğrencilerin bir soruyu nasıl çözmeye çalıştığı anlaşılabilirse, onların matematiği daha iyi anlamalarına yardımcı olunabileceği fikri gündeme gelmektedir (Aydın, 2008). Niss'e göre; eğer öğrencilerin matematiği öğrenme yollarını ve bu yolları tıkayan engelleri anlayabilirsek matematik bilgisinin nasıl üretildiğini, nasıl hafızaya alındığını ve nasıl kullanıldığını daha iyi anlayabiliriz (Niss, 1999). Böylece öğrencilerin davranışlarını modelleyebilir ve ilerideki öğrenmeleri için fikir sahibi olabiliriz. Bu çalışmanın öğretmenlerin, öğrencilerin konulardan bağımsız olarak matematiksel bilgilerini kurarken sahip oldukları anlama ve düşünme biçimlerini farkında olarak öğrenme ortamlarını tasarlamalarına yardımcı olacağı düşünülmektedir.

Araştırma sonucunda belirlenen anlayışı oluşturan operatörlerin listesi öğretenlere çok uzun gelebilir; ancak burada önemli olan bu operatörlerin oluşturduğu anlayışların ne ifade ettiğinin anlaşılmasıdır. Öte yandan öğretmenler bu operatörlerden farklı operatörler bulabilir ve bu operatörlerin bu anlayışlardan hangisi ya da hangileri içinde yer alacağına karar verebilirler. Bu sayede bu operatörleri kullanan öğrencilerinin ortaya çıkarılan bu anlayışlardan hangisi ya da hangilerini geliştirdiklerini belirleyebilirler. Böylece derslerini planlarken veya öğrenme ortamlarını tasarlarken bu çalışmada ortaya çıkan ve kendi öğrencilerinde de oluşması muhtemel anlayışlardan yararlanarak, daha anlamlı öğrenmelerin gerçekleşmesine fırsat verebilirler. Ayrıca öğretmenler ölçme-değerlendirme sürecini belirlenen bu anlayışlar yardımıyla daha etkili bir şekilde tamamlayabilirler. Anlayışlar hakkında düşünmek matematik eğitimi araştırmacılarına öğrencilerin bilgilerini biçimlendirmede yardımcı olurken, öğrencilere ne tür sorular sormaları gerektiğine dair bakış açısı kazanmalarında rehber olmaktadır (Webber, Pesty ve Balacheff, 2002). Bu düşünceyle öğrencilerini ölçmek için bu anlayışlar doğrultusunda hazırlayacakları sınavları yine bu anlayışlar doğrultusunda değerlendirerek öğrencilerinde oluşan anlayışları belirleyebilirler.

REFERENCES/KAYNAKÇA

Altun, M., & Yılmaz, A. (2008). High school students' process of construction of the knowledge of the greatest ınteger function. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences (JFES)*, 41 (2), 237-271. https://doi.org/10.1501/Egifak_0000001125

Aydın, H. (2008). *A phenomenographic study on the usage of mathematical modelling by the teachers and the students teaching and studying in the secondary schools in London.* [Unpublished master's thesis] Gazi University, Ankara.

Balacheff N. (2000) A modelling challenge: untangling learner knowledge. Retrieved September, 25, 2008 from https://telearn.archivesouvertes.fr/file/index/docid/190292/filename/Balacheff2000.pdf

Balacheff N., & Gaudin N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization Retrieved September, 25, 2008 from https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00190425

Balacheff, N., & Gaudin, N. (2003). Baghera assessment project, in S. Soury-Lavergne (ed.), *Baghera Assessment Project: Designing an Hybrid and Emergent Educational Society*. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz, Grenoble.

Balacheff, N. (2013). cK¢, a model to reason on learners' conceptions. In M. Martinez & A. Castro Superfine (Eds.), *Proceedings of the 35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2–15). Chicago: University of Illinois at Chicago.

Baki, A. (1998, October 21-23). *Cebirle ilgili işlem yanılgılarının değerlendirilmesi [Evaluation of misconceptions about algebra].* [Paper presentation]. 3rd National Symposium Of Science Education, Karadeniz Thecnical University, Trabzon, Türkiye

Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi [Mathematics education from theory into practice]. Harf Eğitim Yayıncılık.

Biber, A. Ç., Abdulkadir, T., & Aktaş, O. (2013). Students' misconceptions of fractions and its effect on solving fractions problems. *Trakya University Journal of Education,* 3(2), 152-162. https://dergipark.org.tr/en/download/article-file/200350

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.

Cambridge Dictionary (n.d.) Conception. In Cambridge dictionary. Retrieved 12 June 2022, from

https://dictionary.cambridge.org/tr/s%C3%B6zl%C3%BCk/ingilizce/conception?q=Conception

Cengiz, Ö. M., (2006). *A study on the misconception and mistake of a part of high school students in the teaching of real numbers*. [Unpublished Master's thesis]. Atatürk University, Erzurum.

Çalık Uzun, S. (2012). *Determining preservice elementary teachers? mathemetical conceptions according to cK¢ theory.* [Unpublished doctoral thesis]. Karadeniz Technical University, Trabzon.

Çalık Uzun S., & Arslan S. (2016). Öğrenci Anlayışlarını Modellemek İçin Bir Teori: CK¢ [A Theory for Modeling Student Understandings: CK¢]. In E. Bingölbali, S. Arslan, İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler [Theories in Mathematics Education]*. (pp. 85-99). PegemA

Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme [Mathematical thinking]. In E. Bingölbali, S. Arslan, & İ. Ö. Zembat (Eds.), *Matematik eğitiminde teoriler [Theories in Mathematics Education]*. (pp. 17-42). PegemA.

Doğan, M., & Yeniterzi, B. (2011). Attainment level of seventh grade students for rational numbers. *Selçuk University Journal of the Ahmet Keleşoğlu Faculty of Education*, 31, 217-237.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Hilton et. all. (Eds.) *The teaching and learning of mathematics at University level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Duval, R. (1993). Register de representations semiotique et fonctionnement cognitif de la pense [registers of semiotic representation and cognitive function of thought]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitizes*, 5, 37-65

Duval, R. (2000). Basic ıssues for research in mathematics education. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Vol 1. (pp. 55-69). Eric. https://eric.ed.gov/?id=ED452031

Gökçek, T., & Güneş G. (2011). Determine teachers candidates' levels of concept learning in mathematics with attitudes of mathematics. *Kastamonu Education Journal*, 19(3), 849-858. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/kefdergi/issue/49049/625723

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical- thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.

Işık, A., Çiltaş A., & Bekdemir, M. (2008). Matematik eğitiminin gerekliliği ve önemi [The importance and necessity of mathematics education]. *Journal of Kazım Karabekir Education Faculty*, 17, 174-184. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/ataunikkefd/issue/2770/37025

Kandemir, M. (2006). Learning level of concepts and views about basic mathematics of class, *Pamukkale University Journal of Education*. 19, 29-36. Retrieved from https://dergipark.org.tr/en/pub/pauefd/issue/11124/133035

Kara, G. (2021). *Türkiye'de yayınlanan ortaokul matematik eğitimindeki kavram yanılgıları çalışmalarının incelenmesi* [Unpublished master's thesis]. Hacettepe University, Ankara

Karasar, N. (2009). Bilimsel araştırma yöntemi [Scientific Research Method]. (20th ed.). Nobel

Katrancı, Y., Yılmaz, A., & Kahraman, S. (2009, May 1-3). *Partly correct information structures observed in the process of forming knowledge of functions*. [Paper presentation]. The first international congress of educational research, Çanakkale, Turkiye.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors. a report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Eric https://eric.ed.gov/?id=ED295826

Kurdal, C. (2016). *Student's errors on ratio and proportions done in dynamic and interactive mathematics environments*. [Unpublished master's thesis]. University of Bayburt.

Maracci, M. (2006). On students' conceptions in vector space theory. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* Vol 4. (pp. 129-136). https://www.igpme.org/publications/current-proceedings/

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 40(1), 1–24. https://doi.org/10.1023/A:1003715913784

Okur, M., & Gürel, Z. Ç. (2016). 6 th and 7th grade secondary school students' misconceptions about fractions. *Erzincan University Journal of Education Faculty* 18(2), 922-952. https://doi.org/10.17556/jef.30116

Özçifçi, R. (2007). *Diagnosing the errors in teaching rational numbers and taking the required measures*. [Unpublished master's thesis]. Selçuk University, Konya.

Ryan, J., & Williams, J. (2007). *Children's Mathematics 4-15 Learning From Errors and Misconception*. Open University Press

Soylu, Y., & Soylu, C. (2005). Learning difficulties of 5fh class in primary education at fraction: ordering, adding, subtraction, multiplication in fraction and problems related to fraction. *Erzincan University Journal of Education Faculty*. 7(2), 101-117. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/erziefd/issue/6005/80075

Sertöz, S. (1998). Matematiğin Aydınlık Dünyası. (8th ed). Tubitak Popular Sciscence Book

Toluk Uçar, Z. (2011). Preservice teachers' pedagogical content knowledge: Instructional Explanations, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2 (2), 87-102. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/turkbilmat/issue/21564/231439

Turkish Language Association. (n.d). Conception. In TLA current Turkish Dictionary. Retrieved 12 June 2022, from https://sozluk.gov.tr/

Umay, A. (1996). Matematik eğitimi ve ölçülmesi [Mathematics education and its measurement]. *Hacettepe University Journal of Education* 12, 145-149. Retrieved from http://www.efdergi.hacettepe.edu.tr/yonetim/icerik/makaleler/1277-published.pdf

Vittori, T. (2018). Analyzing the use of history in mathematics education: Issues and challenges around Balacheff's cK¢ model. *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 125-136. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9831-6

Webber, C., Pesty S., & Balacheff N. (2002). A multi-agent and emergent approach to learner modelling. In F. van Harmelen (ed.), *Proceedings of the 15th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI 2002)*. (pp.98-102). Amsterdam: IOS Press

Webber, C. (2004). From errors to conceptions an approach to student diagnosis. In J. C. Lester, R. M. Vicari, & F. Paraguacu (Eds.), *Intelligent tutoring systems, lecture notes in computer science*. 3220, (pp 710–719). Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-540-30139-4_124

Wu, H. (1999). *Some remarks on the teaching of fractions ın elementary school*. Retrieved from http://math.berkeley.edu/~wu/fractions2.pdf

Yazgan, G. (2006*). A quantitative research of 10th year students's conceptions on geometric locus concept by using the Ck¢ model*. [Unpublished Master's Thesis]. Gazi University, Ankara.

Yenilmez, K., & Uysal, E. (2007). The primary school students' level of the ability of establishing relation the mathematical expression and symbols with daily life. *Ondokuz Mayıs University Journal of Education Faculty*, (24), 89-98. Retrieved from https://app.trdizin.gov.tr/makale/TnpBek9EYzM/ilkogretim-ogrencilerinin-matematiksel-kavram-ve-sembolleri-gunluk-hayatla-iliskilendirme-duzeyi

Yürekli, Ü. B. (2008). *The relationship between pre-service elementary school teachers? self-efficacy perceptions and attitudes towards mathematics*. [Unpublished Master's Thesis]. Pamukkale University, Denizli.

Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2006). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* [Qualitative research methods in the social sciences]. Seçkin.

Yujing, N., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias, *Educational Psychologist*, 40(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3

Zembat, İ. Ö. (2008). Kavram yanılgısı nedir? [What is misconception?]. In M. F. Özmantar, E. Bingölbali & H. Akkoç (Eds.) *Matematiksel Kavram Yanılgıları ve Çözüm Önerileri* [Matmematical misconceptions and suggestion for solution]. (pp 1-8). PegemA